习题课二　曲面积分的计算

一、内容提要及教学要求

1　对面积的曲面积分

设 Σ：$z=z(x，y)$，$(x，y)\in D_{xy}$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy$$

“一代、二换、三投影，实质化为重积分算”。

2　对坐标的曲面积分

1). 计算

$\sum$：$z=z(x，y)$时，

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$$

“上正下负”；

$\sum$：x=x(y，z)时，$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \pm \iint\limits_{D_{yz}} R[x(y,z),y,z]dydz$

"前正后负"；

$\sum$：y=y(z，x)时，$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dzdx = \pm \iint\limits_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]dzdx$

"右正左负"

"一代二定三投影"

2). 两类曲面积分之间的联系

（1）两类曲面积分之间的联系

$$\iint_{\Sigma} \{P,Q,R\} \cdot \{\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\}$$

$$= \iint_{\Sigma} \{P,Q,R\} \cdot \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}\mathrm{d}S$$

n ={cos α， cos β， cos γ}，为有向曲面Σ上点（x，y，z）处的单位法向量。

（2）投影转换法　$\sum$: $z=z(x, y)$, $(x, y)\in D_{xy}$

$$\vec{A}=\{P,Q,R\},\ \vec{n}=\pm\{-z_x,-z_y,1\}$$

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

$$=\iint_{\Sigma}\{P\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}+Q\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}+R\}dxdy$$　取上侧

$$=\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\{-z_x,-z_y,1\}dxdy=\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}\,dxdy.$$　上正下负

$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\cos\gamma\, dS$　　$\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\cos\alpha\, dS=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\cos\beta\, dS=\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

3、高斯公式、通量与散度

1). 高斯公式

$$\oiint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv$$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \overrightarrow{dS} = \oiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv$$

P、Q、R在 Ω 上一阶偏导连续，Σ是 Ω 的整个边界曲面的外侧。

（1）注意高斯公式的条件；

（2）Σ不封闭时采取“补面”法 $\iint\limits_{\Sigma} = \oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint\limits_{\Sigma_1} = \iiint\limits_{\Omega} - \iint\limits_{\Sigma_1}$

补的Σ_1要使Ω上P、Q、R上一阶偏导连续，

$\iiint\limits_{\Omega}$ 和 $\iint\limits_{\Sigma_1}$ 易计算。

2). 通量与散度

通 量（流 量） $\Phi = \iint\limits_{\Sigma} \vec{A} \cdot \overrightarrow{dS}$

散度 $\operatorname{div} A = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$

高斯公式可记作 $\oiint\limits_{\Sigma} \vec{A} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div} \vec{A} dv$

4、斯托克斯公式、环流量与旋度

1). *Stokes*公式

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

P、Q、R在空间一维单连通区域G内一阶偏导连续，Σ与Γ符合右手规则。

或 $$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot \vec{ds} = \iint_{\Sigma} \mathrm{rot} \vec{A} \cdot \vec{dS}$$

$$= \iint_{\Sigma} \mathrm{rot} \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

2). 环流量与旋度

$$\vec{A}=\{P,Q,R\},$$

$$\mathrm{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})i+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})j+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})k$$

沿有向闭曲线Γ的曲线积分

$$\oint_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz$$

叫做向量场A沿有向闭曲线 Γ的环流量。

曲面积分的计算法

1. 基本方法

$$\text{曲面积分}\begin{cases}\text{第一类（对面积）}\\\text{第二类（对坐标）}\end{cases}\xrightarrow{\text{转化}}\text{二重积分}$$

（1）统一积分变量 — 代入曲面方程

$$\text{（2）积分元素投影}\begin{cases}\text{第一类：始终非负}\\\text{第二类：有向投影}\end{cases}$$

（3）确定二重积分域

— 把曲面积分域投影到相关坐标面

2. 基本技巧

（1）利用对称性及重心公式简化计算

（2）利用高斯公式 $\begin{cases}\text{注意公式使用条件} \\ \text{添加辅助面的技巧}\end{cases}$

（辅助面一般取平行坐标面的平面）

（3）两类曲面积分的转化

二、典型例题

1、选择与填空

1)、Σ：$x^2+y^2+z^2=a^2$上半球面，Σ_1为Σ在第一卦限部分，则下式成立的是____

$A\quad \iint\limits_{\Sigma} xdS = 4\iint\limits_{\Sigma_1} xdS$ $\qquad B\quad \iint\limits_{\Sigma} ydS = 4\iint\limits_{\Sigma_1} ydS$

$C\quad \iint\limits_{\Sigma} zdS = 4\iint\limits_{\Sigma_1} zdS$ $\qquad D\quad \iint\limits_{\Sigma} xyzdS = 4\iint\limits_{\Sigma_1} xyzdS$

2)、Σ：$x^2+y^2+z^2=a^2$，则$\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=$______

例 计算$\iint\limits_{\Sigma}(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2)dS$ $\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$

3) Σ：$x^2+y^2+z^2=1$，$z\geq 0$上侧则$\iint\limits_{\Sigma} x^2 dydz =$ ________

4)、Σ：$x^2+y^2+z^2=a^2$取外侧，

则$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}=$ ______

5)、设$\vec{A}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$,

则$div\vec{A}$ ______ $,rot\,\vec{A}=$ ______

例1. 计算曲面积分 $I = \oiint_{\Sigma}[(x+y)^2+z^2+2yz]\mathrm{d}S$,其中$\Sigma$是球面 $x^2+y^2+z^2=2x+2z$.

例2　计算$\iint\limits_{\Sigma}(y^2 - z)dydz + (z^2 - x)dzdx + (x^2 - y)dxdy$

Σ 为$z = \sqrt{x^2 + y^2}\,(0 \le z \le h)$的外侧

例6 设 Σ 是一光滑闭曲面，所围立体 Ω 的体积为 V，θ 是 Σ 外法线向量与点 (x, y, z) 的向径 $\vec{r}$ 的夹角，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，试证 $\frac{1}{3}\oiint_{\Sigma} r\cos\theta\, dS = V$.

例7. 计算$\displaystyle\iint_{\Sigma}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{|\vec{r}|^2}dS$, Σ为一封闭曲面$\vec{n}$为Σ上点(x, y, z)处的单位外法向量$\vec{r}=\{x, y, z\}$.

例8.设L 是平面 $x+y+z=2$与柱面$|x|+|y|=1$的交线

从 z 轴正向看去, L 为逆时针方向, 计算

$$I=\oint_L (y^2-z^2)\,\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\,\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\,\mathrm{d}z$$